Exercice :

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0{,}1$.

1°) Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2°) Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

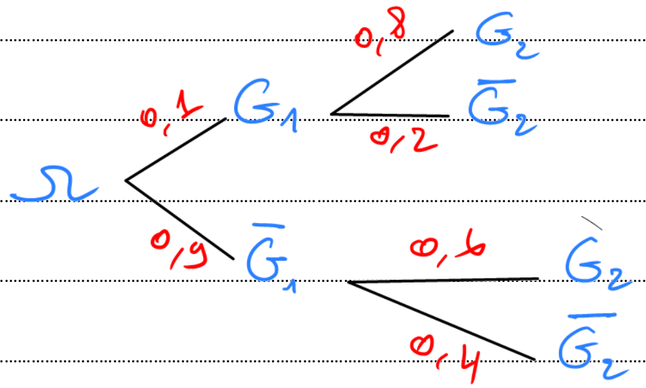
3°) Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

5°) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

6°) Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

1°)



$$p_2 = p(G_2) = p(G_2 \cap G_1) + p(G_2 \cap \bar{G}_1)$$

$$= 0{,}8 \times 0{,}1 + 0{,}6 \times 0{,}9 = 0{,}62$$

2) $$p(\bar{G}_1 / G_2) = \frac{p(\bar{G}_1 \cap G_2)}{p(G_2)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}9}{0{,}62} = \frac{27}{31}$$